THÉORIE du CHOIX SOCIAL

Indépendance aux alternatives non pertinentes

et

parties décisives

François DELAPLACE

ArmorScience

Exercice introductif : une prise de décision démocratique

Un Conseil municipal discute de l'opportunité de construire une Maison des Associations et de l'endroit où il conviendrait de la construire, éventuellement. Certains disent oui, d'autres disent non à la construction.

Quant à l'endroit, il n'y a que deux terrains disponibles X et Y.

On passe au vote.

A la question ***p*** : doit-on construire une Maison des Associations ? le Conseil répond **oui** à la majorité absolue.

A la question suivante ***q*** : doit-on construire la Maison des Associations sur le terrain X ? le Conseil répond **non** à la majorité absolue.

Le Maire annonce alors que l'on construira la Maison des Associations sur le terrain Y.

Justifiez l'incohérence de cette décision.
(*Cet exercice fait appel aux propriétés développées dans ce document. Son corrigé est proposé à la fin du pdf*)

Indépendance aux alternatives non pertinentes

Fonction de Bien-être Social (FBS) et notations

Explorons ensemble le rôle crucial de l'Indépendance aux Alternatives Non Pertinentes (**IANP**) dans la construction d'une volonté collective. Ce principe est au cœur du théorème d'impossibilité d'Arrow.

On notera Ω l'ensemble des votants ; pour simplifier on pourra noter ses membres par des entiers naturels 1, 2, … , *n* ou $V_1, V_2, \dots, V_n$.
L'ensemble des alternatives sera désigné par *X* et les alternatives pourront être notée *x*, *y*, … ou bien *A*, *B*, ...

Pour progresser dans les démonstrations, nous allons nous placer dans le cadre d'une **Fonction *f* de Bien-être Social (FBS)** qui agrège les préférences individuelles (des ordres complets[1] et transitifs[2]) en une préférence collective ; ainsi, si $>_P = \{>_1, >_2, ..., >_n\}$ est un profil qu'on notera *P*, $>_i$ désigne la préférence du votant V_i et $>_P = f(>_P)$ désigne la préférence collective.

Les Fondations : Définitions et Axiomes

Définissons les outils que nous allons utiliser :

- **IANP (Indépendance aux Alternatives Non Pertinentes)** : Si les préférences de tous les individus concernant une paire d'alternatives $\{A, B\}$ (qu'on notera souvent abusivement (A, B)) restent inchangées en ajoutant ou en retirant des alternatives, alors le classement collectif de *A* par rapport à *B* doit rester le même, peu importe comment les individus classent une troisième alternative *C*[3].
- **Groupe Décisif[4]** : Un groupe d'individus *G* est dit **décisif** pour la paire d'alternatives (x, y) si, ***dès que*** chaque membre de *G* préfère *x* à *y* ($x >_i y$ pour tout $i \in G$), la société préfère aussi *x* à *y* ($x >_P y$), quels que soient les choix des individus hors de *G*.
- **Unanimité (Pareto)** : Si tout le monde préfère *x* à *y*, alors la société préfère *x* à *y*.

1 La relation de préférence est un ordre complet en ce sens qu'entre deux alternatives *a* et *b* , il y aura toujours une préférence. Nous verrons ce qu'un ordre non complet peut impliquer : propriété 4, paragraphe « Zône d'ombre ».
2 Nous verrons que la transitivité assure la cohérence des résultats.
3 Voir section suivante.
4 Développé dans la section « Groupe décisif »

- **Domaine Universel ou universalité** : La FBS doit accepter n'importe quelle configuration de préférences individuelles logiquement possible.

L'unanimité paraît être une condition raisonnable et nécessaire de démocratie. La dernière propriété (**universalité**) dit que tous les avis sont possibles et se valent,ce qui est également une règle de démocratie selon Condorcet.

Définition de l'indépendance aux alternatives non pertinentes

L'IANP est assez difficile à saisir ; pour nous aider, on va utiliser un mode de scrutin qui n'est pas indépendant aux alternatives non pertinentes et que nous connaissons bien : le scrutin majoritaire à deux tours.

Aux élections présidentielles de 2002, il y avait trois candidats (parmi d'autres) qui pouvaient espérer être au deuxième tour : Jacques Chirac (*C*), Lionel Jospin (*J*) et Jean-Marie Lepen (*L*).
D'après les sondages, la préférence collective était la suivante $J > C > L$.
Le second tour est donc acquis pour *J* et *C*. Le second tour doit être un duel (*C*, *J*).

De façon à passer avec une plus grande majorité au second tour, Jospin fait appel à deux alternatives non pertinentes, Chevènement (*Ch*) et Taubira (*T*) dont la mission est de récupérer des voix qui ne se portaient pas *naturellement* sur Jospin. En fait, beaucoup de voix pour *J* se sont déplacées vers *Ch* et *T*. Si bien que la préférence collective a été $C > L > J$ et le second tour a été un duel (*C*, *L*).

On dit que le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas indépendant aux alternatives non pertinentes, car le résultat entre *L* et *J*[5] n'a pas dépendu que de *L* et *J* mais deux autres alternatives *Ch* et *T*.

On a la définition suivante :

Définition (IANP) : Soient deux profils $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$. Si pour une paire (x, y), on a :

$$\forall i \in \Omega, x >_i y \iff x >'_i y$$

alors le classement social entre *x* et *y* doit être identique pour $f(\mathbf{P})$ et $f(\mathbf{P}')$.
En d'autres termes, un ensemble décisif est indépendant du profil considéré : si on a un résultat avec un profil **P**, on aura **le même** résultat avec n'importe quel autre profil. On pourra ainsi faire les démonstrations en utilisant un profil qui nous « intéresse ». Ce qui donne l'impression de passer des cas particuliers au cas général, du local au global.

Enfin la notion de **groupe décisif** (ou coalition décisive) est beaucoup plus délicate et nécessite bien qu'on lui consacre une section entière.

Groupe décisif

Définition : Une coalition $G \subseteq \Omega$ est dite décisive pour la paire $(x, y) \in X^2$ si pour tout profil $\mathbf{P}$:

$$(\forall i \in G, x >_i y) \implies x >_P y$$

Définition (IANP) : Soient deux profils $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$. Si pour une paire (x, y), on a :

5 Mais aussi entre entre *J* et *C*.

$$\forall i \in G, x >_i y \iff x >'_i y$$

alors le classement social entre *x* et *y* doit être identique pour $f(\mathbf{P})$ et $f(\mathbf{P'})$, c'est-à-dire que le classement social ne dépend pas du profil considéré

Conséquence :
La définition même d'une coalition décisive repose sur l'existence d'une relation stable entre les préférences individuelles sur (x, y) et le résultat social.
Si l'IANP n'est pas satisfaite, le résultat social pour (x, y) peut changer même si les préférences de *G* sur (x, y) restent fixes, simplement parce que les préférences sur une alternative *z* ont changé.
Dans ce cas, la condition $(\forall i \in G, x >_i y)$ ne suffit plus à garantir $x >_P y$ de manière universelle, c'est-à-dire pour tout profil *P*.
Par conséquent, la notion de "coalition décisive" en tant que propriété intrinsèque d'un sous-ensemble de votants (indépendante du profil complet) nécessite l'IANP pour être mathématiquement consistante.

Pour comprendre ce que sont vraiment ces coalitions, regardons les trois exercices suivants :

Exercice 1 : *Le pouvoir du "Seul contre Tous" (L'indépendance du complémentaire)*

Soit *f* une Fonction de Bien-être Social[6] (FBS) satisfaisant l'IANP et l'axiome de Pareto. On suppose qu'il existe une paire (x, y) et une coalition *G* telle que *G* est décisive pour (x, y), c'est-à-dire :

$$(\forall i \in G\ ,\ x >_i y) \implies x >_P y$$

Montrez que si tous les membres de *G* préfèrent x à y, alors $x >_P y$ est vrai même si tous les individus hors de *G* préfèrent y à x.

Corrigé

1. Par définition de la préférence collective $x >_P y$, la condition est :

$$(\forall i \in G, x >_i y) \implies x >_P y.$$

2. Notons que dans cette définition, **il n'y a aucune condition** sur les préférences de $j \notin G$. Ils peuvent préférer x à y, y à x ou être indifférents.

3. Considérons le profil "*le plus défavorable*" $\mathbf{P}$:

$$\forall i \in G, x >_i y \text{ et } \forall j \notin G, y >_j x$$

4. Puisque la condition de décisivité de *G* est remplie, à savoir $\forall i \in G, x >_i y$, la définition impose $x >_P y$.

5. Conclusion *pédagogique* : Être décisif, c'est avoir un pouvoir "absolu" sur une paire. L'avis de l'opposition (G^c) est mathématiquement réduit au silence par l'implication logique.

Exercice 2 : *L'effet "Déclencheur" (La coalition critique)*

On dit qu'une coalition *G* est **quasi-décisive**[7] pour (x, y) si :

$$[(\forall i \in G, x >_i y) \text{ et } (\forall j \notin G, y >_j x)] \implies x >_P y$$

---

6 C'est-à-dire, un **mode de scrutin** satisfaisant l'IANP et l'axiome de Pareto

7 Dans l'exercice 1, on a prouvé qu'une coalition décisive est quasi-décisive.

Montrez que si G est quasi-décisive pour (x, y), alors tout changement d'avis unanime de G (passant de $x >_i y$ à $y >_i x$) entraîne nécessairement un changement (ou une indétermination) du résultat social, à condition que *f* respecte l'unanimité (Pareto).

Corrigé

1. Supposons G quasi-décisive. Si G veut *x* et G^c veut *y*, le groupe choisit *x*.

2. Imaginons que les membres de G changent d'avis et préfèrent maintenant *y* à *x*.

3. Le nouveau profil $\mathbf{P'}$ est :

$$\forall i \in G, y >'_i x \quad \text{et} \quad \forall j \notin G, y >'_j x \text{ (ils n'ont pas changé)}$$

4. Maintenant, **tous** les membres de la société ($\Omega = G \cup G^c$) préfèrent *y* à *x*.

5. Par l'axiome de Pareto, le résultat social **doit** être $y >_{P'} x$ et par définition de l'IANP, $y >_P x$.

6. Conclusion *pédagogique* : La coalition G est bien le "*déclencheur*". Tant qu'elle veut *x*, *x* gagne. Dès qu'elle bascule vers *y*, *x* perd. C'est ce basculement qui prouve que le pouvoir réside en G.

Notation : on écrira $x >_i y >_i z$ (ou $x >_P y >_P z$) pour dire que la relation de décision est transitive et que le votant *i* (ou l'ensemble des électeurs) préfère *x* à *y* et *y* à *z*. Par transitivité l'individu *i* (ou l'ensemble des électeurs) préfère *x* à *z*.

Exercice 3 : *un exemple*

Considérons le cas d'école suivant avec trois alternatives *A*, *B*, *C* :
V_1 : $A > B > C$
V_2 : $A > C > B$
V_3 : $C > B > A$
On suppose que le mode de scrutin est le mode de scrutin de Condorcet (comparaison des alternatives par paires) et qu'il est indépendant aux alternatives non pertinentes.

1 - Les groupes $G_1 = \{V_1\}$ et $G_2 = \{V_2\}$ sont-ils décisifs pour la paire (A, B) ?

2 - $G = \{V_1, V_2\}$ est-il décisif pour la paire (*A*, *B*) ? Est-il réductible ?
Même question pour le groupe $H = \{V2, V_3\}$.

3 - Le groupe $G \cap H$ est-il un groupe décisif ?

Corrigé

1 - Il y a 3 votants et on applique la règle de la majorité de Condorcet :

- Pour la paire (A, B) : V_1 veut $A > B$, V_2 veut $A > B$, V_3 veut $B > A$.
- La majorité (2 contre 1) choisit $A >_P B$.
  Est-ce que $G_1 = \{V_1\}$ est décisif pour (A, B) ?
  La réponse est **NON**. Pourquoi ?
- Certes, V_1 a obtenu ce qu'il voulait.
- Mais pour être **décisif**, il faudrait que si V_1 votait $A > B$ et que si **tous les autres** (V_2 et V_3) votaient $B > A$, la société choisisse quand même $A > B$.
- Or, on constate que, à la majorité, si V_2 et V_3 s'allient, ils battent V_1.

Règle d'or : Un groupe est décisif s'il gagne **seul contre tous**. Dans cet exemple, V_1 gagne parce qu'il a un allié (V_2), pas parce qu'il est décisif.

2 - On cherche les groupes qui sont **"Souverains"** (décisifs).
Reprenons le raisonnement :

1. On part du groupe décisif $G = \{V_1, V_2\}$ pour la paire (A, B). Ce groupe est décisif car si V_1 et V_2 sont d'accord, ils gagnent quel que soit le vote de V_3. On essaie de le réduire. On se demande : "V_1 est-il décisif seul ?" ou "V_2 est-il décisif seul ?"
On a vu à la question précédente que la réponse à cette question est NON
2. C'est la même chose pour le groupe *H*. Il est décisif pour la paire (*B*, *C*) car si V_2 et V_3 sont d'accord, leur préférence commune $C > B$ quelle que soit la préférence de V_1 .
3. Cependant, $G \cap H = \{V_2\}$ n'est pas décisif ; c'est ce qu'on appelle *le blocage de la Majorité* : dans le vote majoritaire par paire (Condorcet), aucun individu n'est décisif seul. L'intersection de deux majorités différentes peut être un individu, mais cet individu n'est pas forcément décisif.

Alors, où est la faille ?
Anticipons sur ce qui sera dit plus loin. Le vote majoritaire par paire (Condorcet) respecte l'IANP, mais il **ne respecte pas la transitivité**. C'est pour cela qu'il échappe à la dictature[8]. Arrow démontre que **SI** on veut que le résultat soit **toujours** transitif (pas de cycles $A > B > C > A$), **ALORS** la structure des groupes décisifs est forcée de se concentrer sur un seul homme : le dictateur.

Conclusion

- "G_1 n'est pas décisif pour (A, B)" : C'est normal. Dans un système non-dictatorial (comme le scrutin de Condorcet ou le scrutin majoritaire à deux tours), personne n'est décisif pour une paire d'alternatives quelconque. Le pouvoir est distribué.
- "L'intersection de G_1 et G_2 est vide" et la réunion de ces deux groupes non décisifs, est un groupe décisif. Nous verrons plus loin que, dans la preuve d'Arrow[9], si deux groupes G_A et G_B sont **réellement décisifs** (pouvoir absolu), alors leur intersection **ne peut pas être vide**, c'est-à-dire aussi que si deux groupes ne sont pas décisifs, leur réunion n'est pas un groupe décisif.

Propriété 1 — Lemme de neutralité

Si un groupe est assez puissant pour imposer son choix entre *A* et *B*, est-il tout aussi puissant pour imposer son choix entre *C* et *D* ? Si le mode de scrutin est "neutre" (c'est-à-dire s'il ne favorise aucune option), alors la réponse est oui. C'est comme un arbitre impartial : les règles du jeu ne changent pas selon les équipes sur le terrain. En théorie du choix social, si un groupe est décisif sur une paire, il finit par l'être sur toutes, par un effet de contagion.

Pour démontrer que *G* est décisif pour un nouveau couple, disons (A, C), nous devons construire une configuration de préférences (permise par le **Domaine Universel**) et utiliser l'**IANP**.

8 C'est une conséquence (théorème d'Arrow) d'être trop parfait : être indépendant aux alternatives non pertinentes et être transitif implique la dictature ; voir théorème d'Arrow
9 Voir Annexe

Supposons que *G* soit décisif pour (A, B). Nous voulons prouver qu'il l'est pour (A, C). Considérons la configuration de préférences suivante pour les membres de *G* et pour ceux qui n'en font pas partie (G^c) :

Groupe	**Préférences individuelles**
Membres de *G*	$A > B > C$
Individus hors de G (G^c)	$B > C$ (et le rang de *A* est libre)

tb1

Pour les membres de G^c, on choisit un profil où B est préféré unanimement à A car G est un groupe décisif pour (A, B).Le fait de choisir $B > C$ plutôt que $C > B$ vient du fait
- *que la décisivité d'un groupe est indépendant du profil considéré*
- *qu'on a une conclusion évidente pour $B > C$ et pas pour $C > B$.*

Dans ce profil, on a pour les préférences collectives :

- $A > B$ (car *G* est décisif)
- $B > C$ (Pareto)

En utilisant la transitivité de la relation $>$, on a $A > C$

Remarques :

1 - *on utilise la transitivité de $>$; est-elle bien nécessaire ?*

2 - *il y a un passage du local au global ; est-il bien justifié ?*

1. L'hypothèse de transitivité

Pour prouver que la décisivité se propage, on **suppose** que la fonction de bien-être social produit un ordre collectif **transitif**. C'est une exigence de base[10] : on veut que la société soit "rationnelle".

Si la société préfère *A* à *B* et *B* à *C*, elle **doit** préférer *A* à *C*. Sans cela, on tombe dans des cycles (comme le paradoxe de Condorcet) qui empêchent de prendre une décision stable.

2. Le passage du "particulier à l'universel" (Le rôle de l'IANP)

C'est ici que l'**Indépendance aux Alternatives Non Pertinentes (IANP)** fait tout le travail. Rappelons ce que nous avons établi dans notre scénario "particulier" (*tb1*) :

1. Les membres de *G* préfèrent$A > C$ (et on a intercalé *B* entre les deux).
2. Les autres préfèrent $B > C$ (leur avis sur *A* n'a pas d'importance ici).
3. Résultat collectif : $A >_P C$.

10 On verra plus loin ce que l'absence de transitivité implique

Maintenant, appliquons l'**IANP** : cet axiome stipule que le classement collectif de *A* et *C* ne dépend **que** des classements individuels de *A* et *C*. Le fait que *B* soit placé au milieu, au-dessus ou en dessous ne doit pas changer le résultat pour la paire (A, C). Développons ça dans ce qui suit.

Pour prouver que *G* est décisif pour (A, C), nous n'avons pas considérer que le groupe G^c avait une position tranchée sur cette décision. Nous allons construire une situation où *G* gagne **malgré l'opposition totale** de G^c sur la paire (A, C), c'est-à-dire en considérant ce profil de préférences :

Groupe	**Préférences**
Membres de *G*	$A > B > C$
Membres de G^c	$B > C > A$

A - Le raisonnement étape par étape

1. **Regardons** (A, B) : Tous les membres de *G* préfèrent *A* à *B*. Comme nous avons supposé au départ que *G* est **décisif** pour (A, B), la société doit préférer *A* à *B* ; on a donc $A >_P B$, peu importe l'avis de G^c (même s'ils préfèrent *B* à *A*).
2. **Regardons** (B, C) : t**out le monde** (ceux de *G* **ET** ceux de G^c) préfère *B* à *C*. Par l'axiome d'**Unanimité (Pareto)**, la société doit préférer $B >_P C$.
3. **Appliquons la Transitivité** : Si la société a décidé $A >_P B$ et $B >_P C$, alors **elle est forcée** de conclure que $A >_P C$, bien que tous les membres de G^c y soit opposés.

B - Le rôle "magique" de l'IANP

C'est ici que notre remarque sur le "cas particulier" prend tout son sens. Dans ce scénario, nous avons obtenu $A >_P C$ alors que :

- Tous les membres de *G* voulaient $A > C$.
- Tous les membres de G^c voulaient $C > A$.

L'**IANP** stipule que le résultat pour (A, C) ne dépend **que** des avis sur *A* et *C*. Comme *G* a "gagné" (grâce à la transitivité) contre l'opposition unanime de G^c dans ce cas précis, l'IANP nous dit que *G* gagnera **toujours** pour (A, C), quels que soient les rangs de *B* ou d'autres alternatives. *G* est donc devenu officiellement décisif pour (A, C).
En répétant ce processus (en changeant les lettres), on montre que *G* est décisif pour toutes les paires.

C - Pourquoi s'autoriser à imposer une préférence précise ($A > B > C$) à tout le groupe *G* ?

Voici comment nous levons ce doute en théorie du choix social :

i. Le "Test" du Domaine Universel

L'axiome d'**universalité** stipule que notre règle de décision doit fonctionner pour **tous** les profils de préférences imaginables.
Pour démontrer une propriété universelle (comme "*G* est décisif pour n'importe quelle paire"), on a le droit de choisir un profil de test très spécifique. Si la règle de décision survit à ce test et produit un résultat, l'**IANP** se charge ensuite de "verrouiller" ce résultat pour tous les autres cas.
Ce n'est pas qu'une majorité physique, concrète de *G* préfère $B > C$, c'est que nous **posons** cette hypothèse pour voir ce que la société est obligée de répondre (Ce groupe *G* est en fait un groupe fictif)

L'implication $p \implies q$ et l'universalité

On prouve que **si** les préférences sont telles, **alors** la société choisit ainsi.

Mais pourquoi peut-on dire que c'est "toujours" vrai ? C'est grâce à l'axiome d'**universalité**. Cet axiome garantit que le profil de test que nous avons imaginé (le *p*) **existe** forcément dans les entrées possibles de notre fonction.

Une fois que nous avons prouvé $p \implies q$ pour ce cas possible :

1. Le résultat *q* est établi pour ce profil.
2. L'**IANP** propage ce résultat à tous les autres profils qui partagent la même structure pour la paire concernée.

ii. Le rôle "verrou" de l'IANP

Reprenons notre doute : *"Et si certains membres de G préfèrent $A > C > B$?"*
Dans notre démonstration, nous avons prouvé que :

Si tous les membres de *G* préfèrent $A > C$ (en passant par *B*) et que même si tous les membres de G^c préfèrent $C > A$, **alors** la société préfère $A > C$.

L'**IANP** intervient alors de façon cruciale. Elle dit : le classement social de (A, C) ne dépend **que** des classements individuels de *A* et *C*. Pour conclure, on ne s'intéresse pas à la position de *B* par rapport à *C* .

- Peu importe que pour certains membres de *G*, l'alternative *B* soit au milieu ($A > B > C$) ou à la fin ($A > C > B$).
- Tant que leur préférence relative entre *A* et *C* reste $A > C$, le résultat social **doit** rester le même.

L'IANP impose que si deux profils de préférences (appelons-les *P* et *P'*) sont **identiques** pour une paire $\{A, C\}$, alors le résultat social pour cette paire **doit** être le même.

- Si nous construisons un profil de test *P* (très particulier) qui force la société à dire $A > C$...
- Alors, pour n'importe quel autre profil *P'* où les individus ont les mêmes avis sur *A* et *C* que dans *P*, la société est "verrouillée" : elle doit aussi dire $A > C$.

Peu importe ce qui change par ailleurs (les positions de *B*, *D*, etc.), le résultat sur $\{A, C\}$ est figé.

Propriété 2 : La Transitivité

On suppose que :

1. Chaque individu est **rationnel** (ses préférences $A > B > C$ sont transitives).
2. La société doit être **rationnelle** (la préférence collective doit être transitive).

Dans notre "cas particulier" ($A > B$ imposé par la décisivité de *G*, et $B > C$ imposé par l'unanimité), la société est **forcée** par sa propre transitivité de dire $A > C$.

Mais si la préférence collective n'est plus transitive, on peut avoir :
$$A > B,\ B > C \text{ et } C > A$$

Dans ce cas il n'y a aucune préférence collective. C'est le jeu Pierre-feuille-ciseaux.

On notera que l'indépendance aux alternatives non pertinentes est une propriété liée au mode de scrutin, tandis que la transitivité est une propriété des individus ; on part de l'hypothèse que les individus ne se désavoue pas : si le votant *i* a les préférences $A >_i B$ et $B >_i C$, il doit avoir la préférence $A >_i C$ pour être cohérent. Toutefois, c'est à nuancer :
Le votant *i* peut préférer *A* à *B* parce que *A* est plus proche de ses idées ; il peut préférer *B* à *C* parce que *B* est moins brouillon et prend des décisions plus cohérentes que *C*, mais il peut préférer *C* à *A* parce que *C* est ancien camarade de classe qu'il continue à fréquenter.
Ainsi ponctuellement, un individu peut être cohérent, sans que l'hypothèse de transitivité de la relation de préférence soit vérifiée au moment du vote. Toutefois, lorsque ses préférences sont définis pour une seule et même raison, la rationalité veut que cette relation soit transitive.

Mais, nous verrons un peu plus loin, que la transitivité (collective) n'est pas garantie, même si la Fonction de Bien-être Social est indépendante aux alternatives non pertinentes. Cette propriété dépend du mode de scrutin.

Propriété 3 : Monotonie

Imaginons que nous avons deux groupes, G_1 et G_2 et supposons que G_1 soit décisif. Si nous ajoutons des membres pour former un groupe plus grand $G = G_1 \cup G_2$, ce nouveau groupe est-il décisif ?

Concrètement, si G_1 impose déjà sa volonté à la société quoi que fassent les autres (y compris G_2), que se passe-t-il si G_1 et G_2 s'allient pour voter la même chose ?

On va d'abord montrer que tout sur-groupe d'un groupe décisif est décisif.

1 - Démonstration (logique de la décisivité)

Pour cette propriété (le fait que tout sur-ensemble d'un groupe décisif est lui-même décisif), l'**IANP n'est pas requise**. Cela découle directement de la définition d'un groupe décisif et de la logique des ensembles.
Voici pourquoi :

1. **Définition** : Un groupe *G* est décisif si, ***dès que*** tous ses membres préfèrent *A* à *B*, la société préfère *A* à *B*, peu importe l'avis des autres.
2. **Inclusion** : Soit un groupe plus large *G'* qui contient *G* ($G \subseteq G'$).

3. **Application** : Si tous les membres de *G'* préfèrent *A* à *B*, alors **en particulier**, tous les membres de *G* (puisqu'ils sont dans *G'*) préfèrent aussi *A* à *B*.
4. **Conclusion** : Comme *G* est décisif, la société choisit $A > B$. Donc, par définition, *G'* est lui aussi décisif.

C'est une propriété de "monotonie" : plus un groupe est grand, plus il a de chances d'être décisif.

La deuxième partie $G_{union} = G_1 \cup G_2$ est-il un groupe décisif si G_1 et G_2 le sont, est la même. Il suffit de remarquer puisque G_1 est inclus dans G_{union} ($G_1 \subset G_{union}$).

2. Est-ce que cela dépend de l'IANP ?

On a dit ci-dessus : elle n'est pas requise ; mais il faut être plus précis :

- **Pour la réunion elle-même : NON.** La preuve ci-dessus n'utilise que la définition de la décisivité et la théorie des ensembles.
- **Pour la cohérence du système : OUI.** Sans l'IANP, un groupe peut ne pas être décisif pour (A, B), c'est-à-dire perdre tout pouvoir dès qu'on introduit une alternative *C* (par exemple, un mode de scrutin de Borda). Dans ce cas, la notion de "groupe décisif" s'effondre car elle devient instable (voir la partie suivante).

3. Pourquoi l'IANP est-elle alors si spéciale ?

L'IANP est le "ciment" qui garantit que si un groupe est décisif, il le reste quel que soit le contexte, c'est-à-dire pour tous les profils possibles.

L'IANP est le "moteur" indispensable pour l'universalité. Sans l'IANP, un groupe pourrait être "tout-puissant" sur le choix entre la vanille et le chocolat, mais perdre tout pouvoir si l'on commence à discuter de la fraise. L'IANP garantit que le "pouvoir" d'un groupe est **intrinsèque** au groupe et à la paire d'alternatives, et non dépendant du contexte des autres options.

Propriété 4 : Décisivité et exclusion

Dans une démocratie saine, si un groupe décide, son opposé ne peut pas décider simultanément du contraire. Prenons un vote à la majorité absolue : si les "Pour" gagnent, les "Contre" ont forcément perdu. Si les deux pouvaient être décisifs, le système produirait des contradictions (*A* préféré à *B* et *B* préféré à *A*).

Propriété

Si *G* est un groupe décisif, alors $G^c = \Omega \setminus G$ ne l'est pas

Démonstration

Soit $G \subseteq \Omega$ une coalition décisive et $G^c = \Omega \setminus G$ son complémentaire.
Supposons par l'absurde que *G* et G^c soient tous deux décisifs.
Considérons un profil $\mathbf{P}$ où :
- $\forall i \in G,\, x >_i y$
- $\forall j \in G^c, y >_j x$

Puisque *G* est décisif, on doit avoir $x >_P y$. Puisque G^c est décisif, on doit avoir $y >_P x$.
Or, par définition d'un ordre total, la relation de préférence sociale *P* est asymétrique :

$$xPy \implies \neg(yPx)$$

Il y a contradiction. Donc, si *G* est décisif, G^c ne peut pas l'être.

La zône d'ombre

Si un groupe n'est pas assez fort pour imposer sa volonté, cela signifie-t-il que ses opposants le sont ? Pas forcément. Pensez à un règlement exigeant une unanimité ou une majorité qualifiée (ex: 2/3). Si un groupe représente 60% des voix, il n'est pas décisif (il n'atteint pas 66%), mais son complémentaire (40%) ne l'est pas non plus. Il existe donc des "zones de blocage" où personne n'est décisif.

Pour qu'un système de vote garantisse que pour toute coalition *G*, soit *G* est décisive, soit son complémentaire G^c l'est, le système doit satisfaire des conditions de résolution et de non-blocage.

Voici les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir cette propriété (souvent appelée **complétude**) :

1. La condition de Majorité Simple (avec n impair)

Dans un système de vote à la majorité simple où le nombre de votants *n* est impair :

- Si *G* possède la majorité des voix ($|G| > n/2$), elle est décisive.

- Si *G* n'a pas la majorité, alors son complémentaire G^c l'a nécessairement ($|G^c| > n/2$).

- **Résultat :** Soit *G*, soit G^c est décisive. Il n'y a pas de "zone d'ombre" (statu quo ou blocage).

2. L'absence de pouvoir de Veto

Comme on l'a vu avec l'unanimité, dès qu'un individu (ou un groupe) possède un droit de veto, la complétude s'effondre :

- Si *i* a un veto, alors pour que *G* soit décisive, elle doit contenir *i*.

- Si on prend une coalition *G* qui ne contient pas *i*, elle n'est pas décisive.

- Mais son complémentaire G^c (qui contient *i*) n'est pas forcément décisif non plus (il lui manque peut-être d'autres membres pour atteindre le seuil de décision).

- **Condition :** Le système ne doit pas permettre à une minorité de bloquer systématiquement la décision.

3. La structure d'Ultrafiltre (Cas du Théorème d'Arrow)

Dans le cadre d'élections présidentielles, législatives ou municipales, le vote doit aboutir à un résultat. Un mode de scrutin qui aboutit toujours à un résultat est dit **résolu**. Un vote nécessitant une majorité qualifiée n'est pas résolu.

Dans le cadre strict du théorème d'Arrow (avec les axiomes de Pareto, IANP et Transitivité), la condition pour que "soit *G*, soit G^c soit décisive" est équivalente à l'existence d'un **Dictateur**[11].

11 Voir théorème d'Arrow

Mathématiquement, pour que l'ensemble des coalitions décisives $\mathcal{D}$ soit complet (au sens où $\forall G \subseteq \Omega,\ G \in \mathcal{D} \iff G^c \notin \mathcal{D}$), L'ensemble $\mathcal{D}$ est alors un **ultrafiltre**. Sur un ensemble fini Ω, cela implique :

$$\exists i^* \in \Omega \text{ tel que } G \in \mathcal{D} \iff i^* \in G$$

- Si le dictateur i^* est dans *G*, *G* est décisive.

- Si i^* n'est pas dans *G*, il est forcément dans G^c, donc G^c est décisive.

4. La condition de "Neutralité" et de "Caractère Décisif"

Pour qu'un système (non dictatorial) tende vers cette propriété, il doit être **neutre** (traiter les alternatives *x* et *y* de la même manière) et **résolu** :

- **La règle de May :** Pour deux alternatives, la seule règle qui s'impose pour que le système soit neutre, monotone et qui garantisse que soit *G* soit G^c l'emporte (en évitant l'indifférence sociale) est la **règle de la majorité**.

Résumé des conditions

Pour avoir *G* décisive ou G^c décisive, il faut :

1. **Soit un système de majorité simple** avec un nombre de votants impair (pour éviter les égalités).

2. **Soit un système résolu et parétien admettant l'IANP**[12].

Propriété 5 : intersection de coalitions décisives

Si deux groupes différents ont chacun le pouvoir de décider, leur terrain d'entente (l'intersection) est-il lui-même souverain ? Imaginez deux "cliques" puissantes. Si elles sont toutes deux décisives, cela suggère que le pouvoir est très concentré. En mathématiques, si l'intersection reste décisive, on se rapproche d'une structure d'entonnoir qui finit par désigner un seul individu : le dictateur.

Soient G_1 et G_2 deux coalitions décisives. $G_1 \cap G_2$ est une coalition décisive.

Démonstration

1. D'abord $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. En effet, G_1 et G_2 sont deux coalitions décisives et

$$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \implies G_2 \subset G_1^c$$

Or G_1^c est non décisive. Il s'ensuit que G_2 ne l'est pas non plus d'après la propriété 3 (Tout sur-ensemble d'un ensemble décisif est décisif). D'où une contradiction

2. Soit un profil tel que :

- Pour $i \in G_1 \cap G_2$: $x >_i y$ et $y >_i z$ (donc $x >_i z$)
- Pour $j \in G_1 \setminus G_2$: $x >_j y \text{ et } zP_jy$
- Pour $k \in G_2 \setminus G_1$: $y >_k z \text{ et } y >_k x$
- Pour $l \notin G_1 \cup G_2$: $z >_l y >_l x$

12 Voir la théorème d'Arrow (Annexe)

2. Puisque G_1 est décisive et $\forall i \in G_1, x >_i y, \text{ on a } x >_P y$.

3. Puisque G_2 est décisive et $\forall i \in G_2, y >_i z, \text{ on a } y >_P z$.

4. Par transitivité, $x >_P z$.

5. Or, seuls les membres de $G_1 \cap G_2$ préfèrent *x* à *z*. Par l'IANP, cela implique que $G_1 \cap G_2$ est décisive pour (x, z).

6. **Conclusion :** L'ensemble des coalitions décisives forme un ***ultrafiltre***[13] sur Ω (si le système est complet). Comme Ω est fini, cet ultrafiltre est principal, ce qui signifie qu'il existe un individu i^* tel que :

$$G \text{ est décisive} \iff i^* \in G$$

Cet individu i^* est le dictateur.

Hypothèses d'Arrow

La structure algébrique des coalitions décisives dans un cadre arrowien impose que l'ensemble $\mathcal{D}$ des coalitions décisives satisfasse :

$\Omega \in \mathcal{D}$
$G_1 \in \mathcal{D}, G_1 \subseteq G_2 \implies G_2 \in \mathcal{D}$ (Monotonie)
$G_1, G_2 \in \mathcal{D} \implies G_1 \cap G_2 \in \mathcal{D}$ (Stabilité par intersection)

On dit que $\mathcal{D}$ est un **filtre** sur l'ensemble des votants.
Si on considère un scrutin **résolu**, c'est-à-dire s'il doit aboutir à un résultat, alors étant donné un groupe de votants et son complémentaire, l'un des deux est un groupe décisif ; soit la propriété d'exclusion suivante :

$$\forall G \subset \Omega \ , \ G \in D \text{ ou } G^c \in D$$

On dit alors que l'ensemble des coalitions décisives est un **ultrafiltre**.

13 Voir Hypothèses d'Arrow ci-dessous

Dépendance aux alternatives non pertinentes

Passons maintenant à la **Deuxième Partie** de notre étude : montrons les propriétés énoncées s'effondrent sans l'IANP.

Pour construire des contre-exemples, nous avons besoin d'une règle de vote qui viole l'IANP.
La **méthode de Borda** (où l'on attribue des points selon le rang : 3 points pour le 1er, 2 pour le 2e, etc, 0 pour le dernier) ?

Dans un vote de Borda entre *A* et *B*, pourquoi l'ajout d'une alternative *C* très mal classée par certains pourrait-il faire basculer le gagnant entre *A* et *B* ?

Pour mieux comprendre pourquoi l'IANP est si contraignante, regardons ce qui se passe quand on ne l'a pas, comme avec la **Méthode de Borda**.

Imaginez 3 votants et 3 options : A, B et *C*.

- Votant 1 : $A > B > C$
- Votant 2 : $A > B > C$
- Votant 3 : $B > C > A$

Dans un match direct entre *A* et *B*, *A* gagne 2 contre 1.

Exercice 4

Si le votant 3 change son avis sur *C* (l'alternative "non pertinente") pour voter $B > A > C$, est-ce que le score total de points de Borda pour *A* et *B* risque de changer par rapport à l'autre ? (Rappel : 1er = 2 pts, 2e = 1 pt, 3e = 0 pt).

Corrigé

Dans la configuration donnée, on a *A* = 4pts, *B* = 4pts et *C* = 1 pt

Si le votant 3 change d'avis sur *C* et le met en dernier , Pour le votant 3, on a : $B > A > C$ et le résultat final est *A* = 5 pts, *B* = 4 pts, *C* = 0pt

A et B sont en ballottage dans la configuration initiale ; *A* gagne contre *B* dans la seconde configuration. Ainsi l'avis sur *C* modifie le résultat sur (A, B) ; il s'ensuit que ce mode de scrutin n'est pas indépendant aux alternatives non pertinentes.

C'est ce qu'on appelle l'**effet de l'alternative de diversion**. La méthode de Borda y est très sensible car elle utilise des informations d'intensité (les rangs) plutôt que de simples comparaisons binaires.

Sans l'**IANP**, les propriétés que nous avons vues dans la première partie s'effondrent. Voyons comment cela impacte la **Propriété 1 (L'universalité de la décisivité)**.

1. Violation de la Décisivité Universelle

Si l'on utilise Borda, un groupe *G* peut être "décisif" pour faire gagner *A* contre *B* dans un certain contexte (quand *C* est placé entre les deux), mais perdre ce pouvoir si *C* est déplacé. La force du groupe n'est plus universelle ; elle dépend de la présence et de la position d'autres alternatives.

2. Violation de la Transitivité Collective

C'est le célèbre **Paradoxe de Condorcet**. Sans l'IANP, on peut se retrouver avec des préférences sociales cycliques.

Exercice 5

Imaginons 3 individus avec les préférences suivantes :

1. $A > B > C$
2. $B > C > A$
3. $C > A > B$

1 - Si nous regardons les duels deux à deux (vote majoritaire de Condorcet), quel est le résultat pour chaque paire ?

2 - L'IANP est-elle une condition nécessaire de transitivité (collective) ?

Corrigé

1 - *A* contre *B* ; c'est *A* qui l'emporte (1 et 3) ; donc on a $A > B$

B contre *C* ; c'est *B* qui l'emporte (1 et 2) ; donc on a $B > C$

C contre *A* ; c'est *C* qui l'emporte (2 et 3) ; donc on a $C > A$

Ainsi, on a : $A > B \text{ et } B > C \text{ et } C > A$

Il s'ensuit que ce mode de scrutin n'est pas transitif, même sis on fait l'hypothèse que les votants le sont.

De même que pour le mode de scrutin de Borda, le mode de scrutin majoritaire à deux tours ne vérifie pas l'IANP ; aux élections présidentielles de 2002, Jospin en a fait les frais.

2 - Non - La question précédente nous montre que le scrutin de Condorcet n'est pas transitif alors qu'il vérifie la propriété d'être indépendant aux alternatives non pertinentes.

Une autre question est de savoir si on peut avoir simultanément la transitivité (collective) et l'IANP ?

Une réponse courte est oui. Nous développerons ce point plus loin car il s'agit en fait du théorème d'Arrow.

Exercice 6

Si, dans les hypothèses de l'exercice 5, on n'admet pas la transitivité, peut-on avoir pour les 3 candidats *A*,*B*,*C* les préférences suivantes $A > B, B > C$ et $C > A$ dans les deux cas suivants : IANP et non IANP ?

Corrigé

La réponse courte est **OUI** dans les deux cas, *mais pour des raisons radicalement différentes*.

Si l'on n'impose pas la **transitivité**, la société peut tout à fait être "irrationnelle" et produire ce cycle $A > B > C > A$.

1. Cas avec IANP : Le Vote Majoritaire (Condorcet)

Le vote majoritaire par paires (scrutin de Condorcet) est l'exemple parfait d'une règle qui respecte l'**IANP** mais échoue à la t**ransitivité**.

Pourquoi respecte-t-il l'IANP ? Pour savoir si la société préfère *A* à *B*, on compte simplement combien de personnes préfèrent *A* à *B*. On ignore totalement où se trouve *C*. Le résultat du duel ne dépend que de la paire.

Le Cycle : Comme nous l'avons vu avec le paradoxe de Condorcet, si les préférences sont croisées

$V_1 :\ A > B > C$

$V_2 :\ B > C > A$

$V_3 :\ C > A > B$

la majorité préfère *A* à *B*, *B* à *C*, et *C* à *A*.

Conclusion : L'IANP est satisfaite, mais le résultat est un cercle vicieux. La société ne sait pas choisir.

2. Cas sans IANP : Le Scrutin de Borda (ou à deux tours)

Ici, on peut aussi obtenir un cycle, mais il est "artificiel" car il dépend du contexte (des alternatives non pertinentes).

Imaginons une règle complexe où l'on attribue des points, ou un système à élimination.

- **Le mécanisme** : Sans IANP, le fait que la société préfère *A* à *B* peut être dû à la présence de *C* qui "vole" des points à *B*. (*Élection présidentielle de 2002)*
- **Le Cycle** : On pourrait construire une situation où :
  - En présence de *C*, la règle dit $A > B$.
  - En présence de *A*, la règle dit $B > C$.
  - En présence de *B*, la règle dit $C > A$.

Conclusion : Ici, le cycle n'est pas seulement dû à une divergence d'opinions (comme chez Condorcet), mais à l'instabilité de la règle elle-même. Si vous retirez un candidat, tout le classement peut s'inverser. C'est le chaos décisionnel.

Synthèse : Le "Carré Logique"

Pour bien comprendre, on peut présenter ce tableau qui résume ce qui a été dit :

Système	IANP ?	Transitivité ?	Résultat
Dictature[14]	✅ Oui	✅ Oui	Cohérent, mais injuste.
Scrutin de Condorcet	✅ Oui	❌ Non	Juste et stable, mais risque de cycles (incohérent).
Borda / 2 tours	❌ Non	✅ Oui[15]	Décision cohérente, mais manipulable par des tiers (instable).
Le Chaos	❌ Non	❌ Non	Ni cohérent, ni stable.

Ce qu'il faut retenir

L'**IANP** et la t**ransitivité** sont comme les deux jambes d'une marche rationnelle.

- Si on coupe la jambe "transitivité", la société tourne en rond (Cycles).
- Si vous coupez la jambe "IANP", la société marche, mais elle est instable et n'importe quel petit obstacle (un candidat mineur) peut la faire changer de direction.
- Le Théorème d'Arrow dit simplement qu'on ne peut pas avoir ces deux jambes ET la démocratie en même temps.

Groupes décisifs et IANP

La notion de groupe décisif disparaît lorsqu'on n'a pas l'IANP.

Dans la méthode de Borda, le "poids" d'un vote dépend du nombre total d'alternatives. Si un groupe G est assez grand pour faire gagner A contre B quand il n'y a que 2 choix, ce même groupe peut perdre son pouvoir si on ajoute 10 autres candidats qui viennent "diluer" les points.

Question

Si l'influence d'un groupe peut être annulée simplement en ajoutant des candidats qui n'ont aucune chance de gagner, peut-on encore dire que ce groupe est réellement "décisif" au sens structurel du terme ?

La réponse évidente est non.

14 C'est le théorème d'Arrow. Voir son énoncé et sa démonstration en fin de document et dans le document « Ultrafiltres et Théorème d'Arrow »

15 Borda force la transitivité par le calcul des scores, mais au prix d'une violation flagrante de l'IANP.

Dans la théorie du choix social, pour qu'un groupe soit dit "décisif", il doit pouvoir imposer son choix quelles que soient les préférences des autres sur **toutes** les alternatives. Or, avec Borda, le "poids" qu'un groupe peut mettre sur une option dépend de la position des options "non pertinentes".

Ce qui "casse" sans l'IANP

Sans l'IANP, la notion de groupe décisif perd ses propriétés de stabilité :

1. **Instabilité du pouvoir** : Un groupe *G* peut faire gagner *A* contre *B* dans un ensemble $\{A, B, C\}$, mais échouer dans l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.
2. **Manipulation par l'offre** : On peut briser le "pouvoir" d'un groupe simplement en changeant le menu des options (en ajoutant des candidats "clones" par exemple), même si ces candidats ne gagnent pas.

Corrigé de l'exercice introductif : une prise de décision démocratique

On notera que le mode de scrutin proposé par le maire est un référendum de Condorcet « tronqué » ; il y a 3 propositions et leurs négations respectives :

- voulez-vous une Maison des Associations ?

- voulez-vous une Maison des associations sur le terrain X ?

- voulez-vous une Maison des associations sur le terrain Y ?

Le maire propose un référendum uniquement les deux premières propositions. Les résultats obtenus ne permettent pas d'en déduire le résultat d'un référendum sur la troisième proposition.

Concrètement, si à l'issue des réponses aux deux premières questions, un membre du Conseil réclame un vote sur **la question suivante *r* : doit-on construire la Maison des Associations sur le terrain Y ?** Cela fera peut-être sourire, mais sur son insistance, en passant au vote, le résultat peut être non, à la majorité absolue, alors que tous les conseillers sont restés parfaitement cohérents avec eux-même, sans qu'aucun conseiller ne se soit déjugé.

Pourquoi ? C'est ce qu'on appelle le paradoxe de Condorcet, que Condorcet lui-même avait signalé en 1785.

Supposons que Conseil était divisé en trois groupes équivalents de 10 membres chacun G_1, G_2, G_3.

Le point de vue de chacun de ces groupes est résumé dans le tableau suivant :

G_1 : *p*+ *q*+ *r*- on doit construire la Maison des associations sur le terrain X

G_2 : *p*+ *q*- *r*+ on doit construire la Maison des associations sur le terrain Y

G_3 : *p*- *q*- *r*- on ne doit pas construire de Maisons des Associations

Chacun des membres du Conseil est parfaitement logique avec lui-même.

Le résultat du scrutin donne :
- 20 membres pour la construction de la Maison des Associations (G_1, G_2)
- 10 membres pour la construction de la Maison des Associations sur le terrain X (G_1)
- 10 membres pour la construction de la Maison des Associations sur le terrain Y (G_2)

L'ensemble des préférences individuels ne permet pas de dégager une préférence collective cohérente.

Annexe - Théorème d'Arrow

On propose maintenant en exercice une démonstration du théorème d’Arrow pour récapituler ce qui a été dit ci-dessus.

Hypothèses et Notations

Nous considérons une société avec *n* individus et au moins 3 alternatives. La Fonction de Bien-être Social (FBS) doit respecter :

- **Domaine Universel (U)** : Toutes les listes de préférences sont admises.
- **Unanimité (P)** : Si tout le monde préfère *x* à *y*, alors $x >_P y$.
- **Indépendance (IANP)** : Le choix social entre *x* et *y* ne dépend que des avis sur *x* et *y*.
- **Dictature (D)** : Un seul individu peut imposer ses choix seul, au mépris des préférences de tous les votants

Théorème : Si un système de votes *cohérents*[16] vérifie les hypothèses (U), (P) et (IANP), alors il élit un dictateur (D).

Enoncé

1 - Montrer qu’il existe au moins un groupe décisif

2 - Montrer qu’il existe au moins un plus petit groupe décisif *G* (au sens de l’inclusion). Justifier que *G* n’est pas vide.

3 - On suppose que *G* possède au moins deux éléments. Soit *H* une partie de *G* et $K = G \setminus H$ l’ensemble des éléments de *G* qui ne sont pas dans *H* (bref, le complémentaire de *H* dans *G*) ; montrer que soit *H*, soit *K* est un ensemble décisif. Que peut-on en déduire ?

4 - Conclure

Corrigé

1 - L'existence d'un groupe décisif

Par l'axiome d'**Unanimité**, nous savons qu'il existe au moins un groupe décisif : le groupe formé par **tous les individus** (Ω). Si tout le monde veut $x > y$, la société choisit $x > y$.

2 : Existence d’un sous-groupe décisif minimal

Soit D l’ensemble des parties décisives ; c’est un sous-ensemble de l’ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Comme Ω est un ensemble fini, il en est de même de D.

16 Les préférences collectives sont transitives

Pour toute partie *A* de Ω, élément de D, l'ensemble des ses parties $\mathcal{P}(A)$ est fini et l'intersection $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(A)$ des parties décisives inclus dans *A*, l'est aussi. Et cet ensemble $\mathcal{A}$ étant partiellement ordonné pour la relation d'inclusion, il existe au moins un élément *G* de $\mathcal{A}$ qui ne contient aucun autre élément de $\mathcal{A}$.

En ce sens, *G* est un plus plus petit groupe décisif possible. Il ne peut pas être vide puisqu'il est décisif.

3 : Réduction de ce sous-groupe

- Si *G* contient un seul individu, nous avons trouvé notre dictateur.
- Nous allons montrer que *G* ne peut pas contenir plus d'un individu.

Supposons que *G* contienne au moins deux membres. Divisons *G* en deux parties *H* et $K = G \setminus H$ dont aucune n'est vide (et dont aucune n'est *G*):

On a $H \cap K = \emptyset$ et $H \cup K = G$.
- Si *H* et *K* sont non décisives, alors $H^c \text{ et } K^c$ sont décisives.
- Leur intersection $H^c \cap K^c = (H \cup K)^c = G^c$ est aussi décisive.
- Or *G* est décisive, donc G^c ne l'est pas. Contradiction : il s'ensuit qu'au moins une des deux parties *H* ou *K* est une partie décisive.
Or $H \cap K = \emptyset$, il s'ensuit qu'elle ne peuvent pas être toutes les deux des parties décisives. Donc soit *H*, soit *K* est une partie décisive.
- Mais c'est impossible puisque *H* et *K* sont strictement inclus dans *G* qui est une plus petite partie décisive au sens de l'inclusion.

- Ainsi, *G* ne peut pas être subdivisé en deux parties *H* et *K* dont l'une ne serait pas vide. Ainsi, *G* contient un seul élément.

4 : Unicité de *G* et conclusion

Nous avons montré qu'il existe au moins un groupe décisif minimal $G = \{i\}$ ne contenant qu'un seul élément. Montrons son unicité.

S'il y en avait un deuxième $G' = \{j\}$ différent G ; ces ensembles ne contenant qu'un seul élément serait disjoint : $G \cap G' = \emptyset$. Mais c'est impossible puisque les deux groupes sont décisifs. Donc $G = G'$.

On vient de prouver que si le scrutin vérifie les hypothèses (U), (P) et (IANP), alors un seul individu peut imposer ses décisions. En d'autre terme, un tel scrutin élit un dictateur.

Le théorème d'Arrow n'est pas une opinion politique, c'est une limite mathématique. Il nous dit que dans tout système de vote qui utilise des classements (ordres de préférence) :

- Soit on accepte l'irrationalité (cycles de Condorcet).
- Soit on accepte l'instabilité (dépendance aux alternatives non pertinentes, comme en 2002).
- Soit on accepte la dictature.

Sommaire

Table des matières