THÉORIE du CHOIX SOCIAL

Ultrafiltres et Théorème d'ARROW

François DELAPLACE

ArmorScience

Théorème d’Arrow

Introduction

Pour Condorcet, la démocratie peut se définir par l’aphorisme de Lindeberg : *la démocratie est le gouvernement du peuple par le peuple, pour le peuple* . Il souhaite instaurer une *démocratie* dans laquelle le peuple exerce directement le pouvoir et considère que l’élection d’un représentant doit être le candidat qui bat en duel tout autre candidat :

> *Si, parmi tous les candidats à une élection, il en existe un qui, face à n’importe quel autre, lui est préféré par une majorité d’électeurs, alors ce candidat doit être élu.*

Ce candidat est appelé « le vainqueur de Condorcet.

On dit qu’une méthode électorale satisfait le critère de Condorcet quand, lorsqu’il y a un vainqueur de Condorcet, c’est toujours lui que cette méthode déclare vainqueur (sous réserve que les électeurs aient voté selon leurs préférences véritables).

Toutefois, Condorcet lui-même a noté qu’un système *démocratique*, doit vérifier certaines propriétés et peut conduire à un paradoxe. Arrow a montré qu’aucun système électoral ne peut satisfaire un minimum de critères d’équité souhaitables, sans élire un dictateur.

Contexte du théorème d’Arrow

Soit un ensemble *I* d’individus (les électeurs) et un ensemble fini *A* de *n* alternatives ou choix (par exemple, *n* candidats) *;* on supposera *n* supérieur ou égal à 3.

Pour chaque électeur, une **préférence individuelle** consiste à classer, *suivant ses préférences personnelles*, toutes les alternatives, de 1 à *n*. Cette préférence est un ordre total et strict sur *A*, c’est-à-dire que l’électeur ne peut pas omettre de classer une alternative et qu’il ne pas classer deux alternatives ex æquo.
On dit aussi qu’une préférence individuelle est une *permutation* des éléments de *A*.

On souhaite agréger l’ensemble des préférences individuelles en une **préférence sociale** (ordre total et strict) sur *A*, c’est-à-dire en extraire une préférence collective.

Les hypothèses d’Arrow sont les suivantes :

1. **Universalité (ou domaine universel)** : toute permutation des alternatives est une préférence potentielle d’un individu *i* de *I*.
2. **Indépendance des alternatives non pertinentes (IANP)** : la préférence sociale entre deux alternatives ne dépend que des préférences individuelles entre ces deux alternatives.

   Aux élections présidentielles de 2002, dans un duel Lionel Jospin contre Jacques Chirac, Jospin arrive en tête de tous les sondages. En d’autres termes, la préférence sociale entre ces deux alternatives est favorable à Lionel Jospin.
   Toutefois, les alternatives non pertinentes, JP Chevènement et C Taubira ont modifié cette

préférence.
Ainsi le mode de scrutin uninominal à deux tours que nous utilisons pour élire le Président de la République, n'est pas indépendant aux alternatives non pertinentes.

3. **Parétien** : si tous les individus préfèrent *x* à *y*, alors la société aussi.
   C'est la base même d'un vote démocratique.

Théorème d'Arrow,

Un système de vote transitif (cohérent) vérifiant les trois propriétés précédentes, unanime, parétien et indépendant aux alternatives non pertinentes (stable), ne peut pas exister, sauf si ce système de vote élit un dictateur, c'est-à-dire, un individu dont les préférences personnelles déterminent la préférence sociale.

Entrée en scène des ultrafiltres

L'idée est de voir la **préférence sociale comme déterminée par un ultrafiltre** sur l'ensemble des individus *I*. Voici comment et voici pourquoi.

Construction : préférences et filtres

Considérons :

- Un ensemble fini *A* d'alternatives (ou choix) ,
- Un ensemble *I* d'individus, c'est-à-dire ici, l'ensemble des électeurs,
- Pour chaque $i \in I$, un ordre total de préférence $\prec_i$ sur *A*. L'écriture $x \prec_i y$ signifie « L'individu *i* préfère *x* à *y* ». On admet donc qu'entre deux alternatives quelconque, un électeur ne reste pas indifférent et qu'il fait toujours un choix.
- Pour deux alternatives *x*, *y* ∈A, définissons $P_{x \prec y} = \{i \in I \ / \ x \prec_i y\}$. C'est l'ensemble des individus qui préfèrent *x* à *y*.

Maintenant, supposons que la **préférence sociale** soit définie ainsi :

$$x \prec y \text{ si, et seulement si, } P_{x \prec y} \in \mathcal{U}$$

alors, on va montrer que $\mathcal{U}$ est un **ultrafiltre** sur I.
Mais avant toute chose :

Définition d'un ultrafiltre *U* sur un ensemble *fini I*

Un **ultrafiltre** $\mathcal{U}$ est un ensemble de parties de *I* qui satisfait :

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$,

2. $A \in \mathcal{U}$ et $A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{U}$,

3. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$,

4. Pour toute partie $A \subseteq I$, soit $A \in \mathcal{U}$, soit $I \setminus A \in \mathcal{U}$ (mais pas les deux).

Un ultrafiltre est **principal** s'il est de la forme $\mathcal{U}_i = \{A \subseteq I \ / \ i \in A\}$.

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur *I* tel que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_i$; alors

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A = \{i\}$$

Preuve

Par définition,

$$\{i\} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$$

Supposons que l'intersection des éléments de $\mathcal{U}$ contienne au moins deux éléments *i* et *j*. On a alors

$$\{i, j\} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$$

Alors ni $\{i\}$, ni $I \setminus \{i\}$ ne sont des éléments de $\mathcal{U}$.
En effet, tout élément de $\mathcal{U}$ contient au moins la paire $\{i, j\}$. Donc $\{i\} \notin \mathcal{U}$.
D'autre part, $I \setminus \{i\}$ ne contient pas l'élément *i* ; on en déduit que $I \setminus \{i\} \notin \mathcal{U}$.

Or, d'après la propriété 4, un de ces deux ensembles est un élément de $\mathcal{U}$. C'est donc impossible que l'intersection des éléments de $\mathcal{U}$ ne contienne que des sur-ensemble de la paire $\{i, j\}$.
Il s'ensuit qu'un ultrafiltre principal est l'ensemble des sur-ensembles d'un singleton, appelé générateur de l'ultrafiltre.

Remarque 1

Dans un ultrafiltre principal, le singleton $\{i\}$, générateur de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, est unique.

En effet, si $\{i\}$ et $\{j\}$ étaient deux générateurs de $\mathcal{U}$, alors ce serait des éléments de $\mathcal{U}$ vérifiant $\{i\} \cap \{j\} = \emptyset \in \mathcal{U}$, ce qui est impossible, par définition d'un ultrafiltre.

Remarque 2

L'ensemble *I* étant fini, toute famille d'éléments de $\mathcal{U}$ et finie et on peut remplacer la propriété 3 par :

3'. Pour toute famille $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'éléments de $\mathcal{U}$,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{U}$$

*Nous n’étudions que les ultrafiltres sur les ensembles **finis**. Dans ce cas, qui est le notre, la théorie se simplifie beaucoup, car nous avons la propriété suivante, qui est très importante et qui est la pierre angulaire du théorème d’Arrow.*

Théorème

Soit I un ensemble fini. Tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est principal

Preuve

Pour montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre principal, il suffit de montrer que l’ensemble des intersections de ses éléments est un singleton.
On va le montrer par l’absurde.

Supposons que $\mathcal{U}$ ne soit pas principal, alors
- ou bien l’intersection des éléments de $\mathcal{U}$ est l’ensemble vide, ce qui est impossible par définition d’un ultrafiltre (car $\mathcal{U}$ étant fini, l’intersection des éléments de $\mathcal{U}$ est un élément de $\mathcal{U}$),
- ou bien l’intersection des éléments de $\mathcal{U}$ contient au moins deux éléments i et j. Considérons alors le singleton $\{i\}$. Ce n’est pas un élément de $\mathcal{U}$ puisque, par hypothèse, tout élément de $\mathcal{U}$ est un sur-ensemble de $\{i, j\}$; son complémentaire (qui ne contient pas i) n’est pas non plus un élément de $\mathcal{U}$. C’est impossible puisque $\mathcal{U}$ est maximal.

Donc $\mathcal{U}$ et un ultrafiltre principal, c’est-à-dire qu’il est engendré par un seul élément. 😊

Idée centrale de la démonstration

- Si un système de vote satisfait les axiomes d'Arrow, alors **il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur *I*** (l’ensemble des électeurs), tel que la préférence sociale est définie comme ci-dessus.
- Mais I est **fini**, alors cet ultrafiltre est **principal ;** donc il existe un individu i tel que la préférence sociale correspond toujours à celle de i → **dictature**.
- Ainsi **tout système de vote satisfaisant les axiomes d’Arrow est dictatorial**.

Le point clé ici, est que l’ensemble $\mathcal{U}$ des coalitions d’individus qui "déterminent" la préférence sociale entre deux alternatives, doit posséder certaines propriétés si l’on veut que la **préférence sociale soit un ordre total** satisfaisant aux **axiomes d’Arrow**, en particulier l’**indépendance des alternatives non pertinentes (IAP)** et le **principe de Pareto**.

L’idée est donc maintenant de montrer que, **si une fonction de choix social satisfait les axiomes d’Arrow, alors on peut associer à cette fonction un ultrafiltre** sur l’ensemble des individus I.

Définition des coalitions décisives

Fixons deux alternatives $x, y \in A$. On dit qu'un sous-ensemble $S \subseteq I$ est **décisif (ou est une coalition décisive) pour x≺y (*x* est préféré à *y*)** lorsque la proposition suivante est vérifiée :

> *Dès que tous les individus **de S** préfèrent x à y, alors la société aussi préfère x à y, quelle que soit la préférence des autres individus.*

Notons l'ensemble de toutes les coalitions S qui sont décisives pour $x \prec y$ par $D_{x,y}$.

L'axiome **d'indépendance des alternatives non pertinentes (IANP)** garantit que cette notion de "décision" dépend **seulement** des préférences individuelles entre *x* et *y*.

Maintenant, considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ de tous les **sous-ensembles** $S \subseteq I$ qui sont **décisifs pour toutes paires d'alternatives** (pas seulement une paire donnée). On veut montrer que **cet ensemble $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre**.

Pourquoi $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre

On peut démontrer que $\mathcal{U}$ vérifie les axiomes d'un ultrafiltre grâce aux hypothèses d'Arrow :

1. **Non-vacuité** : Le principe de Pareto implique que l'ensemble total *I* est toujours dans *U* :
$$I \in \mathcal{U}$$
En effet, si tout le monde préfère *x* à *y*, alors la société aussi.

2. **Héritage par inclusion**[1] : Si *S* est un ensemble décisif et si *T* est un ensemble d'électeurs contenant *S*, alors *T* est aussi un ensemble décisif :
$$S \in \mathcal{U} \text{ et } S \subseteq T \Rightarrow T \in \mathcal{U}$$
En effet, *S* est un ensemble d'électeurs suffisant pour imposer une préférence sociale ; donc elle l'impose à tout ensemble d'électeurs *T* qui contient *S*.

3. **Intersection**[2] : Si *S* et *T* sont deux coalitions décisives, alors leur intersection l'est aussi :
$$S, T \in \mathcal{U} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{U}$$
En effet, si *S* et *T* sont deux coalitions décisives, alors les individus de *S* d'une part, et les individus de *T* d'autre part, sont suffisants pour imposer le choix social. Donc les individus qui sont à la fois dans *S* et dans *T* le sont aussi.

4. **Maximalité (ultrafiltre)**[3] : Soit *S* un ensemble d'électeurs. Alors soit *S*, soit son complémentaire dans *I*, est une coalition décisive.
$$S \subseteq I \Rightarrow [\text{soit } S \in \mathcal{U}, \text{ soit } I \setminus S \in \mathcal{U}]$$
Cette propriété découle de la nécessité pour la préférence sociale, d'être **totale et résolue :** c'est-à-dire qu'entre deux alternatives *x* et *y*, il y a **toujours** une préférence sociale.
Il s'ensuit que si une coalition S ne suffit pas à trancher entre *x* et *y*, alors son complément doit pouvoir le faire.

---

1 Pour une démonstration rigoureuse, voir « Indépendance aux alternatives non pertinentes et parties décisives : propriété 3 »
2 Pour une démonstration rigoureuse, voir « Indépendance aux alternatives non pertinentes et parties décisives : propriété 5 »
3 Pour une démonstration rigoureuse, voir « Indépendance aux alternatives non pertinentes et parties décisives : propriété 4 »

Récapitulons

L'ensemble $\mathcal{U}$ des coalitions décisives possède les propriétés suivantes :

- Non vide : $I \in \mathcal{U}$,
- Montant par inclusion : $S \in \mathcal{U} \text{ et } S \subseteq T \Rightarrow T \in \mathcal{U}$,
- Fermé par intersection : $S, T \in \mathcal{U} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{U}$,
- Maximal (soit *S*, soit son complément est dans *U*) : $S \subseteq I \Rightarrow [\text{soit } S \in \mathcal{U}, \text{ soit } I \setminus S \in \mathcal{U}]$.

Conclusion

$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur *I*.
Or l'ensemble *I* est fini, donc ***I* est un ultrafiltre principal**, c'est-à-dire :

$$\exists i \in I \text{ tel que } \mathcal{U} = \{S \subseteq I \ / \ i \in S\}$$

Ainsi **le seul système de vote** satisfaisant les axiomes d'Arrow est **une dictature** (celle de *i*).

Sommaire

Table des matières